MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

I

On note

$$j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} ;$$

n est un entier positif ou nul.

1° Calculer $j + \bar{j}$, $j\bar{j}$, vérifier que $j^2 = \bar{j}$; calculer j^3 et, plus généralement, j^n; exprimer $1 + j$ et $1 + \bar{j}$ en fonction de $\bar{j}$ et de j respectivement.

2° p, q, r désignant (pour $n \geqslant 2$) les parties entières respectives de $\frac{n}{3}$, $\frac{n-1}{3}$, $\frac{n-2}{3}$, on pose :

$$a_n = C_n^0 + C_n^3 + \ldots + C_n^{3p}$$
$$b_n = C_n^1 + C_n^4 + \ldots + C_n^{3q+1}$$
$$c_n = C_n^2 + C_n^5 + \ldots + C_n^{3r+2}$$

Former un système d'équations permettant de calculer a_n, b_n, c_n en exprimant de deux manières différentes les sommes $(1 + 1)^n$, $(1 + j)^n$ et $(1 + j^2)^n$.

3° Exprimer a_n, b_n et c_n sous la forme

$$a_n = \frac{2}{3}\left[2^{n-1} + \cos u(n)\right]$$

$$b_n = \frac{2}{3}\left[2^{n-1} - \cos v(n)\right]$$

$$c_n = \frac{2}{3}\left[2^{n-1} + \cos w(n)\right]$$

4° Montrer que les suites (a_n), (b_n), (c_n) sont solutions de l'équation (E) suivante où l'inconnue est la suite numérique (S_n) :

$$\text{(E)} \qquad S_{n+2} - S_{n+1} + S_n = 2^n$$

II

On désigne par A la matrice carrée

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

n désigne désormais un entier strictement positif; on note X_n, Y_n, Z_n respectivement les trois matrices colonnes de A^n; on pose enfin

$$X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} .$$

1° On pose $A = I + B$, I étant la matrice unité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

calculer B^3 et montrer que l'on a $A^3 = 3A^2 - 3A$.

2° Démontrer l'existence et l'unicité des suites numériques (λ_n) et (μ_n) telles que, pour tout n strictement positif, soit vérifiée la relation $A^n = \lambda_n A^2 + \mu_n A$; exprimer λ_{n+1} et μ_{n+1} en fonction de λ_n et μ_n; donner le tableau des valeurs numériques des λ_n et μ_n pour $n \leqslant 8$.

3° Démontrer que les suites numériques (λ_n) et (μ_n) sont solutions de l'équation (E') suivante, où l'inconnue est une suite numérique (S_n) :

$$\text{(E')} \qquad S_{n+2} - 3S_{n+1} + 3S_n = 0 .$$

Comparer A^7 et A et, pour n strictement positif, A^{n+6} et A^n; comment peut-on ramener le calcul de A^n à celui des puissances de A, jusqu'à A^6?

4° Montrer que les suites de matrices (X_n), (Y_n), (Z_n) vérifient l'équation (E″) dans laquelle la suite inconnue (S_n) est une suite de matrices à trois lignes et une colonne :

$$(E'') \qquad S_{n+2} - 3\,S_{n+1} + 3\,S_n = 0\ .$$

5° Montrer que l'on a

$$Y_n = X_{n+1} - X_n = \frac{1}{3}X_{n+2} \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{1}{9}X_{n+4}$$

En déduire l'expression de A^n en fonction des éléments de

$$X_n\ ,\ X_{n+2}\ , \quad \text{et} \quad X_{n+4}\ .$$

III

1° Déterminer une fonction simple ω telle que l'on ait, pour tout entier n non nul, $\lambda_n = \frac{2}{3}\,(\sqrt{3})^n \sin \omega\,(n)$.

2° Calculer le produit de matrices $(1 \quad -1 \quad 1)\ A$.

En déduire que l'on a $(1 \quad -1 \quad 1)\ X_n = 0$, c'est-à-dire

$$\alpha_n - \beta_n + \gamma_n = 0\ .$$

3° Déterminer des fonctions f, g, h telles que l'on ait

$$\alpha_n = \frac{2}{3}\,(\sqrt{3})^n \cos f\,(n)$$

$$\beta_n = \frac{2}{3}\,(\sqrt{3})^n \sin g\,(n)$$

$$\gamma_n = \frac{2}{3}\,(\sqrt{3})^n \sin h\,(n)\ .$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail